RUDBECKSGYMNASIET

Talet pi

Gymnasiearbete, 100p

Rudbecksgymnasiet, 2025/26

Författare: Hampus Otterborg
Handledare: Lukas Johansson

Abstract

In this work I make an analysis over the history regarding the computation of the mathematical constant π. Important breakthroughs regarding mathematical proofs and methods for approximating pi are discussed in a chronological order as we progress through the timeline. The records over total accurately computed decimals has been investigated all the way from ancient Egyptian guesses to the current world record of 314 trillion decimals, as well as how they were done. Other more trivial and relatively inefficient methods are later also mentioned and explained for a wider understanding. Lastly some minor explanations over the usage of pi in more practical situations will be done as well. I have also conveyed my own experiments on one of the more trivial methods for pi-approximation and managed to calculate the constant down to the precision of 4 decimals.

Nyckelord: Pi, Decimaler, Leibniz, Irrationalitet, Cirkel.

Innehåll

1. Inledning

Cirkeln, en form som saknar hörn, eller har oändligt många hörn. Denna figur förekommer vart vi än går, vare sig man inser det eller inte. Från elektroners orbitaler kring atomkärnan, till CD skivor, och himlakroppar och stjärnor i rymden. De förekommer i alla möjliga storlekar. Det måste finnas en anledning till att denna form uttrycker sig vart man än går, ett slags samband. Detta samband har utforskats kring i tusentals år och förståelsen över detta samband har sedan öppnat upp otaliga nya vägar som hjälpt vårt samhälle att bli till det vi ser idag. Detta samband har sträckt sig över till flera användningsområden där cirklar inte längre tycks synas till. Ett magiskt tal har sedan utformats från detta samband, som visar sig överallt, och det är det talet som vi kallar för pi, ett tal med lika många decimaler som den har möjligheter. Att talet har en oändlig mängd decimaler utan mönster innebär också att alla sekvenser av siffror som någonsin funnits finns inom pi. Skulle man översätta bokstäver till siffror kan hela böcker reciteras från början till slut någonstans inom pi. Utan detta lilla tal, hade många geniala uppfinningar genom historien, aldrig kunnat uppfinnas, och vår värld hade sett mycket annorlunda ut.

2. Syfte och frågeställningar

Syftet med detta arbete är att undersöka historien och uppkomsten av talet pi och förstå dess användbarhet i dagens samhälle. De frågor som besvaras i arbetet är följande:

- Hur lyckades man hitta talet pi?
- På vilka sätt kan man härleda och beräkna talet pi?
- Vad finns det för användningsområden för talet pi?

3. Teori

3.1 Tidig historia

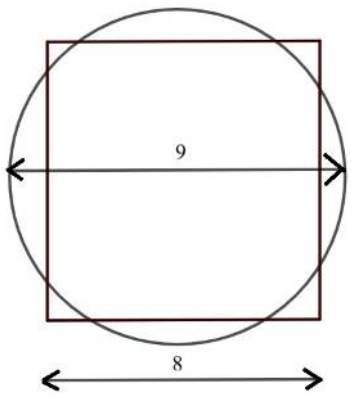
Matematik har använts av människor i tusentals år. Den har över tiden utvecklats och har hjälpt människan utvecklas till en stor utsträckning. Vid en viss tidpunkt började man komma på hur man kunde beräkna areor över vissa områden och på så sätt började man förstå mönster, och hitta samband mellan olika formler. En kvadrats area kunde beräknas genom att multiplicera längden av två av dess sidor. En triangels area kunde beräknas genom att multiplicera dess höjd med basen och sedan halvera resultatet. Men sedan uppstod ett stort problem när man stötte på cirkeln. Denna form saknar sidor, och oavsett vad man gjorde kunde man inte hitta något enkelt samband för att beräkna dess area. Denna form som ändå förekom extremt vanligt inom flera sammanhang, blev ett mysterium som skulle ta tusentals år att lösa.

3.1.1 Babylonien

En av de första uppskattningar man lyckats hitta fanns i Babylonien omkring 2000 år f.Kr. Man fann att om man lindade ett rep runt cirkeln, och sedan dividerade längden med cirkelns diameter, fick man ett tal som till synes verkade samma för alla cirklar. Med denna upptäckt lyckades babylonierna uppskatta talet pi till $\frac{25}{8} = 3.125$. [1]

3.1.2 Egypten

Vidare lyckades också egyptierna uppskatta pi, fast på ett annorlunda sätt. De gjorde ett antagande där en cirkel med diametern 9 hade samma area som en kvadrat med sidan 8.[2] Med denna antagande får man ett värde på pi som faktisk kommer ganska nära. Kvadratens area är då 64. Genom att kvadrera radien och multiplicera den med en konstant (pi) som skulle bli 64 får man då pi:s värde till $\frac{256}{81} \approx 3.1604$



[1] H. Bailey, David, M. Borwein, Jonathan, B. Borwein, Peter, Plouffe, Simon. “The Quest for Pi”. University of Newcastle. 1996-06-25 https://openresearch.newcastle.edu.au/articles/journal_contribution/The_quest_for_pi/29020766?file=54416015 s. 2.

[2] H. Bailey, David, M. Borwein, Jonathan, B. Borwein, Peter, Plouffe, Simon, s. 2.

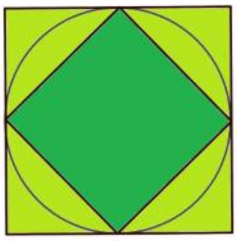
3.1.3 Bibeln

Å andra sidan fanns det flera civilisationer som helt enkelt nöjde sig med att $\pi=3$ Vilket vi till exempel ser i bibeln:

> Hiram gjorde också havet i gjutet arbete. Det var tio alnar från ena kanten till den andra, helt runt och fem alnar högt. Ett snöre som var trettio alnar långt mätte omkretsen. (1 Kungaboken 7:23)

3.1.4 Uttömningsmetoden

Längre fram i tiden, ca: 250 år f.Kr. finner man en metod, som inte längre bygger på gissningar. Denna metod användes av Arkimedes från antikens Grekland. Hans metod var istället att uppskatta dess värde med hjälp av polygoner. Han började med att skriva in en mindre hexagon inuti cirkeln och en utanför. Sedan beräknade han arean för båda hexagonerna. Detta gav honom två värden, en som är större än cirkelns area och en som är mindre. Sedan Dubblade han antalet sidor på dessa polygoner (Se nedanstående bild), och utförde samma beräkningar ända tills han kom till en polygon med 96 sidor.[3] Detta kallas allmänt för uttömningsmetoden och har använts för många senare beräkningar av pi, då den faktiskt ger ett svar som inte längre är en uppskattning utan istället en helt matematiskt korrekt beskrivning av pi.[4]

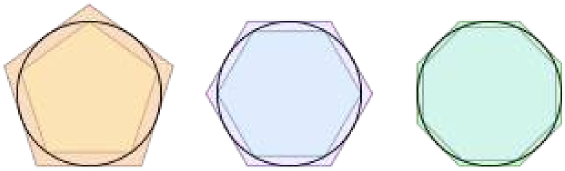


Om vi har till exempel två kvadrater som skrivs in i cirkeln (se bilden ovan), så ser vi att den yttre kvadraten har lika stor sida som cirkelns diameter. Om cirkeln lämpligtvis har en radie på 1 l.e. så har den yttre kvadraten en area på 4 a.e. Den inre kvadraten har en lika lång diagonal som cirkelns diameter. Sidan blir därför (med Pythagoras sats) $\sqrt{2}$ l.e. och då är arean 2 a.e. Då vet vi att cirkelns area är mellan 2 och 4 a.e. Eftersom arean på en cirkel följer formeln πr^2, så motsvarar dessa värden också intervallet för talet pi, alltså, $2<\pi<4$. Detta stämmer, men det är inte så exakt.

---

[3] Casselman, Bill." The method of exhaustion". University of British Columbia. 2003. https://personal.math.ubc.ca/~cass/courses/m446-03/exhaustion.pdf

[4] Berg, Sandra. "Om talet π". Uppsala universitet. 2016–08. https://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:955827/FULLTEXT01.pdf s. 6.



https://en.wikipedia.org/wiki/Method_of_exhaustion#/media/File:Archimedes_pi.svg

Tar vi istället en hexagon (Se bild ovan), som Arkimedes började med, så blir uträkningen mer komplicerad. Vi kan dela in den inre hexagonen i sex liksidiga trianglar. Längden på en sida på dessa trianglar är då samma som cirkelns radie (1 l.e.). För att beräkna dess areor krävs höjden, som kan beräknas med hjälp av Pythagoras sats: $0.5^2 + h^2 = 1^2$. Detta ger höjden $\sqrt{0.75}$ l.e. Arean på triangeln blir då $\frac{1 \cdot \sqrt{0.75}}{2}$ a.e. Den totala arean av alla 6 trianglar (hela hexagonen) ger oss den nedre delen av intervallet till $3\sqrt{0.75}$ a.e. Till den yttre hexagonen används samma tillvägagångssätt, men nu är istället höjden på trianglarna lika med cirkelns radie. Vi måste beräkna sidan på trianglarna, och med Pythagoras sats får man: $1^2 + (0.5x)^2 = x^2$. Vi får att sidan är $\frac{2}{\sqrt{3}}$ l.e., och arean blir $\frac{\frac{1*2}{\sqrt{3}}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ a.e. Multiplicera detta med 6 och den övre delen av intervallet blir $\frac{6}{\sqrt{3}}$a.e. Nu har vi helt plötsligt ett intervall på $2.598 < \pi < 3.464$, vilket är mycket bättre. Genom att öka antalet sidor får vi alltså ett ännu närmare intervall till pi. Med en 96-sidig polygon, som Arkimedes använde sig av, lyckades han uppskatta värdet av pi till $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$ vilket motsvarar ungefär $3.1408 < \pi < 3.1428$

Det dröjde sedan fram till 150 år e.Kr. innan fler framsteg gjordes. Den grekiska Astronomen Ptolemy uppskattade pi till $\frac{377}{120} \approx 3.14166$. Och under 400-talet lyckades den kinesiske matematikern Zu Chongzhi uppskatta pi till $3.1415926 < \pi < 3.1415927$ Detta gjordes med liknande metod som arkimedes använde 700 år tidigare, men istället för att använda en polygon med 96 sidor, användes en polygon med 24 576 sidor. [5]Detta rekord skulle inte lyckas överträffas på över 1000 år.

[5] Strogatz, Steven. “Pi Day: How One Irrational Number Made Us Modern”. The New York Times. 2024-03-15. https://www.nytimes.com/article/pi-day-math-geometry-infinity.html (Hämtad 2026-02-08)

3.2 Konvergerande serier

Efter 1400 talet hade pi uppskattats till 16 decimaler, av Jamshid Al-Kashi. Men efter att Europa lyckats återhämta sig från medeltidens stillestånd tog utvecklingen fart i början av 1600 talet. Det är nu man börjar använda sig av komplexa matematiska formler istället för uppskattningar med hjälp av geometri. En mycket känd formel är Gregory-Leibniz-serien som säger att . . .

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\ldots$$

Denna formel hittades genom en definition för $\tan^{-1}(x)$:

$\tan^{-1}(x)=\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$. Detta är grunden till alla oändliga serier som funnits. Man kan utveckla formeln till $\tan^{-1}(x)=\int_0^x (1-t^2+t^4-t^6+\ldots)\,dt=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots$

Om vi använder x = 1 fås Gregory-Leibniz-serien som nämndes ovan, eftersom vi vet att $\tan^{-1}(1)=\frac{\pi}{4}$ (Uttryckt i radianer). Denna formel användes redan under 1400 talet i Indien och man kunde då beräkna pi till 11 korrekta decimaler. Tyvärr är denna formel mycket ineffektiv och det krävs hundratals termer bara för att beräkna pi till två korrekta decimaler.

Genom att istället använda $\frac{\pi}{4}=\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ (en utveckling av $\tan^{-1}(1)$ med hjälp av additionsformler för tangens), kan man få serien

$$\frac{\pi}{4}=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1}{5\cdot 2^5}-\frac{1}{7\cdot 2^7}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}-\frac{1}{7\cdot 3^7}+\ldots\right)$$

Denna formel konvergerar till pi mycket snabbare än den första serien. År 1706 upptäckte matematikern John Machin dock en ännu snabbare serie som använde sig av sambandet $\frac{\pi}{4}=4\tan^{-1}\left(\frac{1}{5}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{1}{239}\right)$[6] . Med serien som man får från detta samband lyckas Machin beräkna pi ända till 100 korrekta decimaler.

Samma år uppkommer för första gången den grekiska bokstaven π för att representera talet pi. Denna bokstav användes av William Jones, en vän till Isaac Newton, i ett av hans många matematiska verk. Detta sätt att uttrycka pi på skulle dock inte populariseras förrän Leonhard Eulers användning av bokstaven år 1748 i hans bok *Introductio in Analysin Infinitorum.*[7]

---

[6] H. Bailey, David, M. Borwein, Jonathan, B. Borwein, Peter, Plouffe, Simon, s. 2-3.
[7] ” Fun facts about pi”. Piday. 2026. https://www.piday.org/pi-facts/ (hämtad 2026-02-11)

3.3 Irrationalitet

Mitt i denna utveckling skedde också flera andra fundamentala upptäckter kring talet pi. Det första som kom år 1761 var beviset att π är ett irrationellt tal. För ett irrationellt tal krävs att talet ej kan skrivas som en kvot mellan två heltal $\frac{a}{b}$. Man hade redan hittat bevis till flera andra irrationella tal som till exempel $\sqrt{2}$, men just π visade sig vara svårare att bevisa. Vid 1700-talet hade man redan hittat över 150 decimaler av pi utan att ha sett något som helst mönster över sekvensen, så det var redan svårt att tro att talet skulle vara rationellt. Men som allt annat i matematik kan man aldrig vara säker förrän ett matematiskt bevis har utformats kring problemet. Det skulle bli Johann Heinrich Lambert som knäckte den frågan. Kort sagt cirkulerade hans resonemang kring definitionen för arctangens som vi nämnt tidigare. Vi vet även att $\tan\frac{\pi}{4}=1$. Eftersom arctangens-serien är en oändlig sekvens där alla termer är olika, så kan då inte $\tan^{-1}(1)$ vara ett rationellt tal. Detta säger oss även att $\frac{\pi}{4}$ inte heller är rationellt och därigenom är π ett irrationellt tal. Men den fullständiga förklaringen är dock mer avancerad och längre vilket kanske också är anledningen till att det tog så lång tid innan beviset upptäcktes.[8]

3.4 Transcendens

En annan fråga som även uppstod efter att pi hade bevisats vara irrationellt, var om pi också kunde vara transcendent. Ett transcendent tal är ett tal som inte kan vara nollstället till något polynom med rationella koefficienter. Ett sådant tal skulle visa sig vara mycket svårt att hitta, då i princip alla rationella tal är algebraiska (motsatsen till transcendent). Vidare är även irrationella tal som $\sqrt{2}$ inte transcendenta, på grund av till exempel ekvationen $2x^2-4=0$. Tidigare hade man bara lyckats skapa egna tal som uppfyller kriterierna för ett transcendent tal, men det första redan existerande tal som skulle bevisas vara transcendent var talet e (1873, av Charles Hermite). Detta bevis att e var transcendent skulle sedan vara till stor hjälp när Ferdinand von Lindemann även lyckas bevisa 1882 att π är transcendent. Liksom beviset för irrationalitet var även detta ett mycket svårt och komplicerat bevis. Flera matematiker efteråt tillägnade tid åt att förkorta och göra en mer elegant version av Lindemanns bevis. I hans bevis utgår han från att π skulle vara algebraiskt. Om det så skulle

[8] Gourévitch, Boris. "The world of π". Pi314. 2013-04-13. http://www.pi314.net/eng/lambert.php#:~:text=Lambert%20actually%20demonstrated%20the%20following,4%20and%20thus%20are%20irrationnal%20!&text=Lambert's%20demonstration%20(1761)%20is%20a,let's%20try%20and%20summarize%20it! (Hämtad 2026-02-09)

vara att π är transcendent skulle detta antagande alltså ge en motsägelse. I detta antagande följer också att $i\pi$ är transcendent eftersom produkten av två algebraiska tal fortfarande ger ett algebraiskt tal (i är algebraiskt genom exempelvis polynomet $x^2 + 1 = 0$). Lindemann upptäckte den så kallade Lindemann-weierstrass-satsen. Denna sats säger att om ett tal a är algebraiskt, följer det också att e^a är transcendent. Med denna sats kan vi då säga att $e^{i\pi}$ är transcendent. Tar vi sedan Eulers identitet $e^{i\pi}+1=0$ kan vi se att $e^{i\pi}=-1$. Eftersom -1 är ett algebraiskt tal är då också $e^{i\pi}$ ett algebraiskt tal. Vi har nu fått en motsägelse eftersom vi i vårt antagande fick att $e^{i\pi}$ skulle vara transcendent, när det inte är det. Enligt Lindemann-Weierstrass-satsen är då $i\pi$ transcendent och därigenom är π transcendent då vi redan vet att i är algebraiskt. [9]

3.5 senare bedrifter

Under de kommande århundradena beräknades allt fler decimaler av pi med liknande metoder. Följande tabell visar alla rekord i kronologisk ordning:

Namn	Årtal	Antal decimaler
John Machin	1706	100
Thomas Fantet de Lagny	1719	112
Anonym	1721	152
Zacharias Dase och Strassnitzky	1844	200
Thomas Clausen	1847	248
Lehmann	1853	261
Rutherford	1853	440
William Shanks	1853	527
D. F. Ferguson	1946	620
D. F. Ferguson	1947	710
D. F. Ferguson	1947	808
Levi B. Smith och John Wrench	1949	1120

Värt att nämna I denna lista är att den visar endast antalet *korrekta* decimaler av pi. Flera av namnen ovan beräknade fler decimaler men gjorde felberäkningar

[9] Berg, Sandra, s. 17-21

som gjorde att alla efterföljande decimaler också blev fel. Mest känd av dessa var framförallt William Shanks, som beräknade pi ända upp till 707 decimaler. Tyvärr gjordes en felberäkning vid den 528:e decimalen vilket gjorde att alla decimaler efteråt också blev inkorrekta. Detta hade dock inte upptäckts förrän år 1946 då Ferguson tog sig an att slå rekordet.[10] Ett annat tillägg är att under denna tid gjordes flertalet utvecklingar inom kalkylatorer (analoga, inte att förväxlas med elektriska miniräknare). Dessa verktyg kom att vara till stor hjälp under senare tider då de underlättade stort för numeriska problem.

3.5.1 Datorer

1945 uppfanns den första elektroniska datorn, ENIAC. Denna dator gjorde det möjligt att snabbt och effektivt beräkna stora aritmetiska problem utan någon hjälp av människan (med undantag från att människan fick programmera datorn så att den visste vad den skulle göra). Det dröjde bara några månader efter Levi B. Smiths och John Wrench beräkningar innan ENIAC fick ta sig an samma uppgift. Efter att ha kört i endast 70 timmar lyckades datorn nästan dubbla rekordet, genom att ha beräknat 2037 decimaler, och varenda en av dem var korrekta. Detta innebar starten för en explosionsartad trend där nya decimaler hittades exponentiellt. Under tidens gång blev inte bara datorer snabbare och mer kapabla, utan även algoritmerna och metoderna som användes blev mer effektiva.

Det har totalt gjorts 50 nya rekord från och med försöket med ENIAC, och alla har gjorts med datorer. 1954 slogs rekordet med datorn NORC. Denna dator beräknade 3093 decimaler, men det som egentligen var mer intressant är att det tog datorn endast 13 minuter för att göra det. Det visar på en mycket snabb utveckling inom datorer. 4 år senare lyckades man för första gången beräkna 10 000 decimaler, och bara 3 år efter det var man redan uppe i 100 000 korrekta decimaler. 1 000 000 decimaler skulle dock inte hända förrän 1973. Mellan 80 och 90 talet började en intressant kamp mellan Yasumasa Kanada (Japan) och Chudnovsky bröderna (USA). Under denna period (1982–2002) slogs rekordet 24 gånger och 21 av gångerna gjordes av antingen Kanada eller Chudnovsky bröderna. Under denna tid gick man ända från 4 194 288 decimaler till 1 241 100 000 000 decimaler.[11] Efter 2009 började man istället bygga egna datorer enbart med syfte att slå rekordet. Det nuvarande rekordet ligger på 314 000 000 000 000 decimaler utan en enda felberäkning. Försöket tog 110 dagar att göra och slutfördes i november 2025.[12]

---

[10] H. Bailey, David, M. Borwein, Jonathan, B. Borwein, Peter, Plouffe, Simon, s. 9-10.
[11] H. Bailey, David, M. Borwein, Jonathan, B. Borwein, Peter, Plouffe, Simon, s. 10.
[12] J. Yee, Alexander. “y-cruncher – A Multi-Threaded Pi-Program”. Numberworld. 2025-12-11. https://www.numberworld.org/y-cruncher/ (Hämtad 2026-02-08)

3.6 Kolliderande block

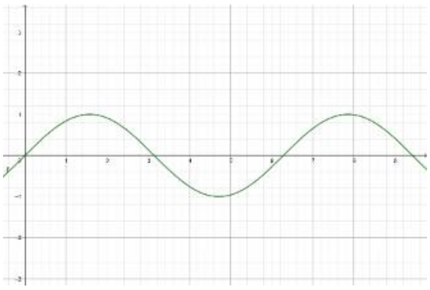
Ett väldigt oväntat fenomen som på något sätt beräknar pi utan några felmarginaler är genom att låta två block kollidera med varandra och sedan beräkna antalet kollisioner som sker. Detta är tyvärr något som inte kan utföras i stor utsträckning i verkligheten, då den kräver att blocken saknar friktion och har perfekt elastiska kollisioner, vilket inte är möjligt att uppnå. Därför brukar detta fenomen oftast demonstreras inom datorprogram där man kan uppnå dessa egenskaper. Det går ut på att blocken placeras på ett friktionsfritt underlag med en vägg på ena sidan. Ena blocket får stå still vid början av simuleringen medan det andra blocken skickas med konstant fart mot det första blocket. Om båda väger lika mycket, kommer det total antalet kollisioner resultera i 3. Om blocket som försatts i rörelse istället är 100 gånger tyngre, kommer antalet kollisioner vara 31. Låt oss nu säga att blocket är 100 000 000 gånger tyngre. Då kommer antalet kollisioner resultera i 31 415. Var finns cirkeln någonstans? Jo, denna fysikaliska händelse har med energi och moment att göra. Eftersom kollisionerna är helt elastiska och ingen friktion finns så måste energin vara den samma utöver hela rörelsen. Vi följer då formeln moment mellan två objekt i rörelse: $m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = M$. Här är M momentet, som alltid måste vara densamma då ingen energi får gå förlorad. Eftersom massan här också är konstant måste alltså hastigheterna på blocken ändras på så sätt att M förblir oförändrat. Genom att utveckla sambandet med formeln för kinetisk energi $E_k = \frac{m v^2}{2}$ Får vi istället $\frac{m_1 \cdot (v_1)^2}{2} + \frac{m_2 \cdot (v_2)^2}{2} = E$. Om vi behandlar hastigheterna som variabler (x och y) och massorna och energin som konstanter (a, b respektive c) får vi ett uttryck som ser ut så här: $\frac{a x^2}{2} + \frac{b y^2}{2} = c$. Och detta är den generella formeln för en ellips. Om man sedan ändrar x och y-axlarna från att representera v_1 och v_2 till $\sqrt{m_1} v_1$ och $\sqrt{m_2} v_2$ så får vi istället uttrycket $\frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ vilket ger oss en perfekt cirkel istället, och därigenom kan man sedan förstå varför fenomenet lyckas beräkna pi. [13]

3.7 Användningsområden

Upptäckten och förståelsen av pi har öppnat upp många nya vägar inom matematiken men också i verkligheten. Förutom att kunna beräkna omkrets, areor, volymer, med mera för cirkulära objekt, så uppstår pi även inom trigonometri. När man pratar om vinklar brukar man i vardagliga sammanhang använda måttet grader. Men med hjälp av pi har man kunnat uttrycka det med

[13] Pullen, Josh, Sanderson, Grant." Why colliding blocks compute pi". 3Blue1Brown. 2026-02-11. https://www.3blue1brown.com/lessons/colliding-blocks-v2#title (Hämtad 2026-02-11)

hjälp av radianer, som ger vinkeln utifrån längden på den cirkelbåge som uppstår med den vinkeln. Detta sätt att uttrycka vinklar har sedan blivit mycket mer begripligt och användbart när det kommer till att bilda trigonometriska funktioner så som sinuskurvor.



Sådana kurvor visar sig överallt i verkligheten, från vågor i vattnet, till ljudvågor, ljusspektrum, och så vidare. Genom att förstå och bemästra dessa vågor har vi sedan kunnat som exempel skapa många elektroniska apparater som finns idag. Om du ska skicka någonting via internet krävs speciella signaler som går mellan satelliter och oss, och dessa kräver förståelse för pi då även dessa liknar trigonometriska kurvor. Cirkulära objekt har även använts i tusentals år för att få saker att rulla. När man ökar storleken på ett cirkulärt objekt ökar också hastigheten när man rullar det, eftersom varje rotation på objektet tillryggalägger en högre sträcka när storleken ökar. Detta koncept har sedan tagits till användning inom kugghjul, där man kan sänka farten på rotationen genom att koppla ett större kugghjul med ett mindre. Pi används ofta inom arkitektur, då den är nödvändig när man ska designa rundade former på till exempel en byggnad eller skulptur.[14]

Ett annat område som talet Pi också förekommer inom är sannolikhetslära. Det finns flertalet olika koncept där just detta tal förekommer. Ibland kan man enkelt se varför, men i vissa fall kan det också vara mycket oväntat utan någon enkel koppling. Experimentet med Buffons nål är ett av de många exempel som finns. Experimentet går ut på att släppa ett tunt avlångt föremål som en nål på ett papper med parallella linjer utritade, där problemet ligger i att beräkna sannolikheten att nålen landar på pappret så att den korsar en av linjerna. Just där är det bevisligen lättare att förstå då det måste ha något med den cirkelformade rotationen på nålen som ger sambandet.

Ett annat känt exempel handlar om tal som är relativt prima. Tal som är relativt prima innebär att talen saknar gemensamma heltalsfaktorer (med undantag från talet 1). Ett exempel på två relativt prima tal är 17 och 5. Men det intressanta är att sannolikheten att två tal är relativt prima visar sig vara $\frac{6}{\pi^2}$. Hur uppstod talet pi i detta sammanhang? Det verkar inte finnas någon enkel koppling då frågan i sig inte har något som helst med cirklar att göra. Detta är något som har kommit

[14] "Pi in Real Life: The Many Applications of this Infinite Number". Demme Learning. 2025-02-12 https://demmelearning.com/blog/pi-real-life/ (Hämtad 2026-02-10)

från Baselproblemet. Detta problem handlar om att lista ut vad summan $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ konvergerar till. Problemet tog nästan 100 år att lösas och löstes 1734 av Leonhard Euler.

Summan ger den oändliga serien $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+...+\frac{1}{n^2}$ och Euler lyckades se att den motsvarar exakt $\frac{\pi^2}{6}$. Liknande kan man också fråga sig varför Gregory-Leibnitz serien konvergerar till pi när man bara adderar termer som inte verkar ha något med pi att göra.[15]

4. Buffons nål

Ett intressant sätt att beräkna pi på som man enkelt kan göra själv är genom ett känt problem som kallas för Buffons nål. Det enda man behöver i praktiken är ett pappersark och en nål eller tändsticka.

4.1 Metod

För den lättaste versionen av problemet så mäter man längden på tändstickan eller nålen, och sedan ritar man ut raka parallella linjer längs pappret. Avståndet mellan linjerna ska då vara lika långt som längden på nålen/tändstickan. Genom att släppa tändstickan från valfri höjd så finns det två sätt som den kan landa på pappret. Antingen landar den så att den korsar en av linjerna eller att den inte gör det. Det man sedan ska göra är att släppa tändstickan om och om igen och sedan med hjälp av resultatet försöka se vad sannolikheten är att den korsar linjerna. Detta görs genom användning av följande formel:

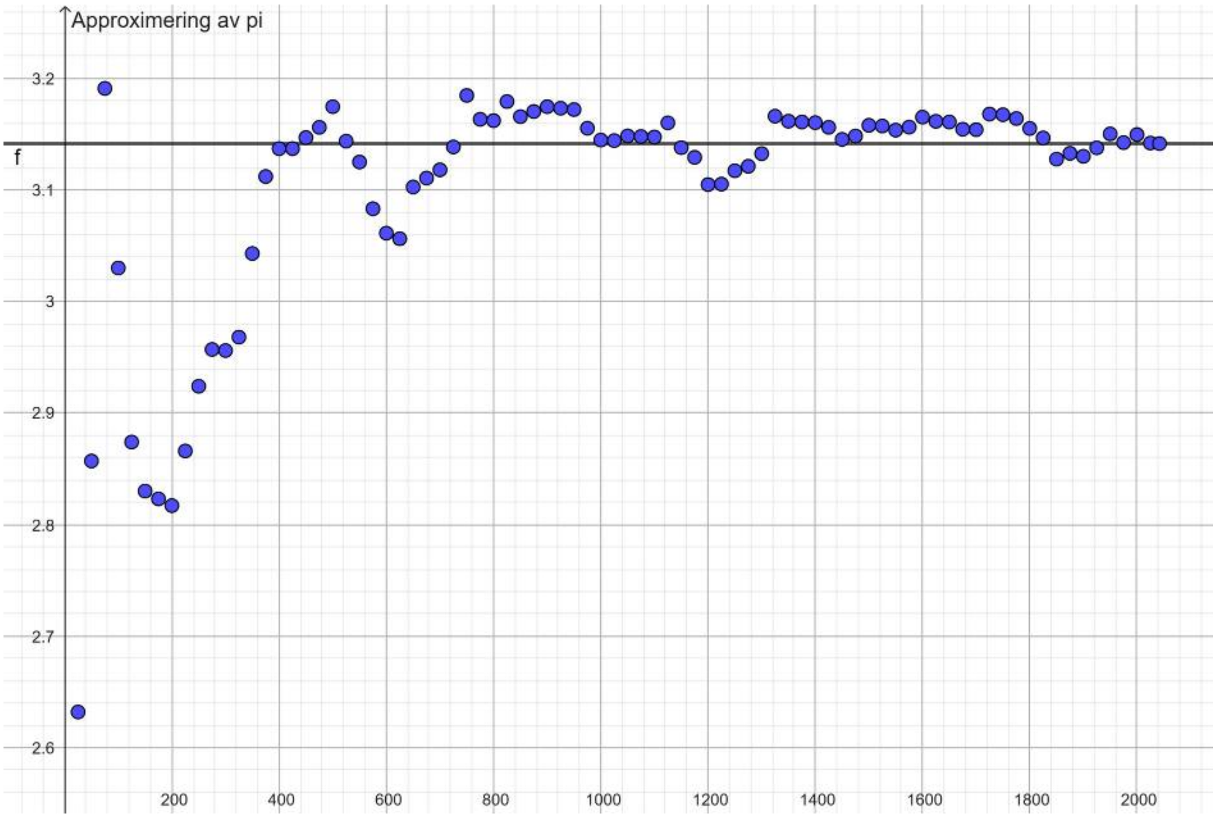
$$P(H)=\frac{\text{antal gynsamma försök}}{\text{antal totala försök}}$$

[15] Berg, Sandra, s. 23

Jag har valt att själv utforska detta problem till mitt arbete. Efter varje 25:e försök beräknade jag kvoten mellan antal gynnsamma försök och totala försök, och tittade hur resultatet ändrades med tiden. Kvoten i sig ser inte så intressant ut direkt, men när man gör om den så att täljaren blir två, så börjar man se det intressanta med detta experiment. Ta de första 450 försöken som exempel. Antalet gynnsamma försök var 286. $\frac{286}{450}$ ser inte så speciellt ut. Men nu förkortar vi bråket så att täljaren blir 2 istället. Då får man istället c: a $\frac{2}{3.1469}$. Det verkar finnas ett samband mellan talet pi och att släppa tändstickor på ett linjerat papper.

4.2 Resultat

I mitt experiment gjorde jag totalt 2042 försök, med noterad kvot efter varje 25:e försök. Genom att ändra täljaren till 2 på alla kvoter och sedan skriva ut de nya nämnarna på ett rutnät i Geogebra, så fick jag detta resultat:



Graf skapad i Geogebra

Den svarta linjen i grafen visar vart π ligger. Vi ser att enligt grafen så verkar det som om jag kommer närmare och närmare det faktiska värdet på pi. Nedan följer också en tabell med viktiga punkter inom försöket:

Försök	Händelse
10	Nämnaren ligger på 2.22, endast 1 av dessa försök korsade inte linjen.
75	Nämnaren hamnar för första gången på rätt ental (3,191)
350	Här slutar nämnaren sjunka under 3
450	Första gången som rätt hundradel fåtts (3,1469)

650	Från och med denna punkt stannar nämnaren på rätt tiondel hela tiden
1000 - 1100	125 försök där nämnaren stannar mellan 3.14 och 3.15
2025	Första gången där nämnaren har 3 korrekta decimaler (3,141)
2042	Stannade här då nämnaren hade nått 4 korrekta (!) decimaler (3,1415)

4.3 Diskussion kring experimentet

Detta sätt att beräkna pi är mycket långsamt och har flera felkällor som förändrar resultatet. I grafen kan man se hur värdet på nämnaren hela tiden skiftar från för stort till för litet. Första felkällan är själva tändstickan som jag använde. Som med alla material finns det alltid en viss friktion som skiljer sig från andra material. Hade jag använt en nål istället så hade friktionen varit mindre vilket gör att den hade rullat längre när den väl landat, och därigenom finns en chans att dess nya position inte längre korsar linjerna, vilket hade ändrat resultatet. Även pappret själv har också friktion, så olika underlag kan ge lite olika resultat.

Sedan finns också faktumet att tändstickan är tjockare en till exempel en nål. Detta medför att det blir lite lättare för tändstickan att landa på linjerna eftersom den har större yta. Vidare kan jag inte heller veta om pappret är rätvinklig mot gravitationskraften. Minsta lutning, som hus oftast har, kan ge en skillnad. Slutligen finns det alltid en chans att den som utför försöken kan påverka hur den landar. Experimentet utgår från att kasten är helt slumpmässiga. Men som individ kan man alltid medvetet kasta på ett visst sätt, vilket förändrar resultatet en aning.

Anledningen till att alla dessa små felkällor nämns är på grund av att syftet med experimentet är att beräkna något med precision. Med 4 decimalers precision, som jag lyckades få, kan dessa till synes små felkällor göra enorm skillnad, och därför måste man tänka på det. Dock visar detta experiment även på hur dåligt det är att försöka härleda matematiska samband med hjälp av saker i verkligheten, då de perfekta förhållanden man behöver inte existerar i praktiken. Det är kanske därför som Arkimedes och alla andra efteråt bytte över till beräkningar via teoretiska bevis istället, där man själv har full kontroll över vilket resultat man får.

5. Sammanfattning och Diskussion

Vi har nu gått igenom historien om pi och de många otaliga genombrott som gjorts. Upptäckten av pi kan inte ges ut till någon enskild person. Det är istället tusentals år av samarbete mellan matematiker runt världen, som hjälpt utveckla och bredda ut definitionen för pi så att vi idag kan få full förståelse för dess funktion och innebörd. Från antikens mätningar och gissningar, till Arkimedes geometriska lösningar, till Leibnitz oändliga serier, och slutligen en modern tid där allting görs automatiskt via datorer. Med de 314 biljoner kända decimaler av pi och flertalet matematiska bevis som gjorts kring talet kan det verka som om vi har utforskat allt som går kring talet. Vi kan alltid hitta fler matematiska bevis för att höja statusen och underligheten kring denna konstant, men i grund och botten känner vi till det vi behöver veta om den. Även andra intressanta metoder och användningsområden har också tagits upp, som verkligen visar på hur många olika platser som talet visar upp sig inom. Vi har gett oss förståelse för hur starkt detta tal har integrerat sig inom vårt moderna samhälle, och varför vi därigenom heller inte kan leva utan den.

Efter att talet visats vara irrationellt 1734 kan vi med säkerhet veta att det aldrig kommer att synas några mönster inom den oändliga sekvensen av decimaler som pi har att ge. Och sanningen är även så att vi heller inte behöver veta fler. Inom vardagligt bruk används ofta bara de första två decimalerna, 3.14. Sedan finns det områden där man behöver mer precision. Oavsett om du vill beräkna volymen på din cirkulära pool eller om du med precision vill beräkna omkretsen på hela vår planet, kommer det i verkligheten aldrig krävas mer än omkring 40 decimaler, då detta är tillräckligt för att beräkna omkretsen på vårt kända universum ner till precisionen av en atom. I vissa teoretiska fall kanske man kan använda sig av fler, men det blir onekligen så att vi saknar praktisk nytta av att hitta fler decimaler. Man kan väl då ställa sig frågan, varför fortsätter vi? Svaret kanske mer ligger i den mänskliga instinkten. Om vi tar det senaste rekordet på 314 biljoner decimaler, och sedan ställer frågan, vad är nästa decimal? Det enda sättet att veta är att fortsätta framåt, även om vägen tycks sakna slut. Detta är något som vi sett upprepas genom historien många gånger om, och som heller inte visar några tecken på att avta. Det finns såklart andra anledningar till dessa beräkningar, som till exempel att testa datorers gränser till vad de klarar av, men själv tror jag att det till största del har något med psykologin att göra.

6. Källförteckning

Berg, Sandra. ”Om talet π”. Uppsala universitet. 2016–08.

https://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:955827/FULLTEXT01.pdf

Casselman, Bill.” The method of exhaustion”. University of British Columbia. 2003.

https://personal.math.ubc.ca/~cass/courses/m446-03/exhaustion.pdf

H. Bailey, David, M. Borwein, Jonathan, B. Borwein, Peter, Plouffe, Simon. “The Quest for Pi”. University of Newcastle. 1996-06-25.

https://openresearch.newcastle.edu.au/articles/journal_contribution/The_quest_for_pi/29020766?file=54416015

”Fun facts about pi”. Piday. 2026

https://www.piday.org/pi-facts/

(hämtad 2026-02-11)

Wicklin, Rick. „Analyzing the first 10 million digits of pi: Randomness within structure”. SAS. 2015-03-12

https://blogs.sas.com/content/iml/2015/03/12/digits-of-pi.html

(Hämtad 2026-02-09)

“Pi in Real Life: The Many Applications of this Infinite Number”. Demme Learning. 2025-02-12

https://demmelearning.com/blog/pi-real-life/

(Hämtad 2026-02-10)

”5 Ways Engineers Use Pi”. Honeywell. 2026.

https://www.honeywell.com/us/en/news/2020/03/5-ways-our-engineers-use-pi

(Hämtad 2026-02-10)

Pullen, Josh, Sanderson, Grant.” Why colliding blocks compute pi”. 3Blue1Brown. 2026-02-11.

https://www.3blue1brown.com/lessons/colliding-blocks-v2#title

(Hämtad 2026-02-11)

J. Yee, Alexander. “y-cruncher – A Multi-Threaded Pi-Program”. Numberworld. 2025-12-11.

https://www.numberworld.org/y-cruncher/

(Hämtad 2026-02-08)

Strogatz, Steven. “Pi Day: How One Irrational Number Made Us Modern”. The New York Times. 2024-03-15.

https://www.nytimes.com/article/pi-day-math-geometry-infinity.html

(Hämtad 2026-02-08)

Gourévitch, Boris. “The world of π”. Pi314. 2013-04-13.

http://www.pi314.net/eng/lambert.php#:~:text=Lambert%20actually%20demonstrated%20the%20following,4%20and%20thus%20are%20irrationnal%20!&text=Lambert's%20demonstration%20(1761)%20is%20a,let's%20try%20and%20summarize%20it!
(Hämtad 2026-02-09)